

第3讲分式方程（练习）

一、分式方程的概念

练习

1. 下列关于 x 的方程： $\frac{1}{x} + x = 1$ ， $\frac{x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{2}{5}$ ， $\frac{1}{x-1} = \frac{4}{x}$ ， $\frac{x^2-1}{x+1} = 2$ 中，分式方程的个数是()
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】C

【解析】解： $\frac{x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{2}{5}$ 不是分式方程，是整式方程，
故选：C.

【标注】【知识点】分式方程的定义

2. 在方程 $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{y-1}$ ， $\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x-2}$ ， $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ ， $\frac{ax-by}{a^2+b^2} = \frac{bx+ay}{a^2-b^2}$ （ a, b 为已知数）中，分式方程有()。
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】B

【标注】【知识点】分式方程的解

二、解分式方程

练习

3. 方程 $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-1}$ 的解为()。
- A. $x = -2$ B. $x = 2$ C. $x = -1$ D. $x = \frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】 方程两边同乘以 $x(x-1)$ 得，

$$2x - 2 = 3x,$$

$$\text{解得：} x = -2.$$

经检验： $x = -2$ 是原方程的解。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

4. 解分式方程： $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{x-1}.$

【答案】 $x = -3.$

【解析】 去分母，得 $x(x-1) = (x+1)(x-3)$

$$\text{整理得：} x = -3$$

经检验： $x = -3$ 不能使最简公分母为0，

$\therefore x = -3$ 是原方程的解。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

5. 解下列分式方程。

(1) $\frac{3}{2x-4} - \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2}.$

【答案】 (1) $x = \frac{5}{3}.$

【解析】 (1) $\frac{3}{2(x-2)} - \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2},$

$$3 - 2x = x - 2,$$

$$x = \frac{5}{3}.$$

检验，当 $x = \frac{5}{3}$ 时， $2x - 4 \neq 0$ ，

$\therefore x = \frac{5}{3}$ 是原方程的解。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

6. 解下列分式方程：

(1) $\frac{2}{x+2} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}.$

【答案】 (1) $x = 4.$

【解析】 (1) 解方程, 去分母,

$$\text{得 } x = 4$$

经检验, $x = 4$ 是原方程的解.

【标注】 【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

7. 解分式方程: $\frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{x+1}{4x^2-1}$.

【答案】 $x = 6$.

【解析】 方程左右两边同时乘以 $(2x+1)(2x-1)$, 得:

$$3(2x-1) - 2(2x+1) = x+1,$$

$$6x-3-4x-2 = x+1,$$

$$6x-4x-x = 1+2+3,$$

$$x = 6,$$

检验: 把 $x = 6$ 代入 $(2x+1)(2x-1)$, 得, $(2 \times 6 + 1)(2 \times 6 - 1) = 143 \neq 0$,

$\therefore x = 6$ 是原方程的解.

【标注】 【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

8. 解方程: $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{x^2+x-2}$.

【答案】 方程无解.

【解析】 方程两边同时乘以 $(x+2)(x-1)$,

$$x(x+2) - (x+2)(x-1) = 3,$$

解得 $x = 1$,

检验得 $x = 1$ 是方程的增根,

方程无解.

【标注】 【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

9. 解分式方程: $\frac{5x-4}{x-2} = \frac{4x+10}{3x-6} - 2$.

【答案】 分式方程无解.

【解析】 去分母得： $15x - 2 = 4x + 10 - 6x + 12$ ，

移项合并得： $17x = 34$ ，

解得： $x = 2$ ，

经检验 $x = 2$ 是增根，分式方程无解。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

10. 解方程： $\frac{8}{4x^2 - 1} + 1 = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ 。

【答案】 原分式方程无解。

【解析】 $\frac{8}{4x^2 - 1} + 1 = \frac{2x + 3}{2x - 1}$

$$8 + (2x + 1)(2x - 1) = (2x + 3)(2x - 1)$$

$$8 + 4x^2 - 1 = 4x^2 + 2x + 6x + 3$$

$$4x^2 - 4x^2 - 2x - 6x = 3 - 8 + 1$$

$$-8x = -4,$$

$$x = \frac{1}{2},$$

$$\text{检验：当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时，} (2x + 1)(2x - 1) = (2 \times \frac{1}{2} + 1) \times (2 \times \frac{1}{2} - 1) = 0,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 是增根，}$$

$\therefore$ 原分式方程无解。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

练习

11. 解方程： $\frac{x + 1}{4x^2 - 1} = \frac{3}{2x + 1} - \frac{4}{4x - 2}$ 。

【答案】 $x = 6$ 。

【解析】 原方程即 $\frac{x + 1}{(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{3}{2x + 1} - \frac{2}{2x - 1}$ ，

$$\text{方程两边同时乘以 } (2x + 1)(2x - 1), \text{ 得 } x + 1 = 3(2x - 1) - 2(2x + 1),$$

$$\text{解之得：} x = 6,$$

$$\text{检验：将 } x = 6 \text{ 代入 } (2x + 1)(2x - 1) = 13 \times 11 \neq 0,$$

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x = 6$ 。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

12. 解方程：

$$(1) \frac{2}{x^2+3x} + \frac{3}{3x-x^2} = \frac{14}{x^2-9}.$$

【答案】(1) $x = -1$.

【解析】(1) 方程去分母得： $2x - 6 - 3x - 9 = 14x$,

解得： $x = -1$,

经检验 $x = -1$ 是分式方程的解.

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

三、分式方程的增根

练习

13. 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-2} + \frac{k}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ 有增根 $x = -2$, 则 k 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$, 都

$$x+2+k(x-2)=4,$$

$\therefore$ 原方程增根为 $x = -2$,

$\therefore$ 把 $x = -2$ 代入整式方程, 得 $k = -1$.

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

14. 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2-x} + \frac{m-5}{x^2+x} = \frac{m-1}{x^2-1}$ 有增根 $x = 1$, 求 m 的值.

【答案】 $m = 3$.

【解析】 $(x+1) + (m-5)(x-1) = (m-1)x$

$$-3x = m - 6$$

$$x = -\frac{m-6}{3}.$$

$\therefore$ 分式方程增根为 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{m-6}{3} = 1.$$

$$\therefore m = 3.$$

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

练习

15. 若关于 x 的分式方程 $\frac{3}{x-4} + \frac{x+m}{4-x} = 1$ 有增根, 则 m 的值是().

- A. $m = 0$ 或 $m = 3$ B. $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m = -1$

【答案】D

【解析】去分母得： $3 - x - m = x - 4$ ，
由分式方程有增根，得到 $x - 4 = 0$ ，即 $x = 4$ ，
把 $x = 4$ 代入整式方程得： $3 - 4 - m = 0$ ，
解得： $m = -1$ 。

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

16. 如果方程 $\frac{x}{x-3} = \frac{3m}{x-3}$ 有增根，那么 m 的值为_____。

【答案】1

【解析】方程两边都乘以 $(x-3)$ 得， $x = 3m$ ，
 $\therefore$ 方程有增根，
 $\therefore x - 3 = 0$ ，
解得 $x = 3$ ，
 $\therefore 3m = 3$ ，
解得 $m = 1$ 。

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

四、分式方程无解

练习

17. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-5} + 2 = \frac{2x}{5-x}$ 无解, 那么 $m = (\quad)$.

A. -10

B. 10

C. 20

D. -20

【答案】A

【解析】原方程可化为 $m + 2(x - 5) = -2x$, 解得 $x = \frac{10 - m}{4}$, 欲使原方程无解, 需有 $x = 5$, 即 $m = -10$, 故选择A.

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

18. 关于 x 的方程 $\frac{x}{x-3} = 2 + \frac{k}{x-3}$ 无解, 则 k 的值为 $(\quad)$.

A. ± 3

B. 3

C. -3

D. 无法确定

【答案】B

【解析】去分母得: $x = 2x - 6 + k$,
由分式方程无解, 得到 $x - 3 = 0$,
即 $x = 3$,
把 $x = 3$ 代入整式方程得: $3 = 2 \times 3 - 6 + k$, $k = 3$.
故选B.

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

19. 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x^2-1}$ 无解, 则 m 值为 $(\quad)$.

A. $-\frac{3}{2}$ 或2

B. 2

C. $-\frac{3}{2}$

D. 不存在

【答案】A

【解析】去分母可得: $m(x - 1) - 2(x + 1) = 3$,
 $mx - m - 2x - 2 = 3$,
 $(m - 2)x = 5 + m$,
当 $m - 2 = 0$ 时,
 $\therefore m = 2$, 此时方程无解, 满足题意.
当 $m - 2 \neq 0$ 时,
 $\therefore x = \frac{5 + m}{m - 2}$.

由于该分式方程无解，故 $x^2 - 1 = 0$.

$\therefore x = -1$ 或 $x = 1$

当 $\frac{5+m}{m-2} = -1$ 时，

解得： $m = -\frac{3}{2}$.

当 $\frac{5+m}{m-2} = 1$ 时，

此时 m 无解，

故答案为： $-\frac{3}{2}$ 或 2 .

故选A .

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

20. 若方程 $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+4} = 1 - \frac{x-m}{x^2+x-12}$ 无解，则 m 的值为（ ） .

A. $m = 10$

B. $m = 24$

C. $m = 10$ 或 $m = 24$

D. 不存在

【答案】 C

【解析】 去分母，得 $x(x+4) - 2(x-3) = (x-3)(x+4) - (x-m)$ ，

合并得 $2x = m - 18$ ，

①整式方程无解，不可能，

②整式方程的根为增根，

当 $x = 3$ 时， $2 \times 3 = m - 18$ ，解得 $m = 24$ ；

当 $x = 4$ 时， $2 \times (-4) = m - 18$ ，解得 $m = 10$.

故 m 的值是10或24 .

故选C .

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

练习

21. 若关于 x 的方程 $\frac{3-2x}{x-3} + \frac{2+mx}{3-x} = -1$ 无解，则 m 的值为（ ） .

A. 3

B. -3

C. $-\frac{5}{3}$ 或-1

D. 0

【答案】 C

【解析】 去分母得： $3 - 2x - 2 - mx = -x + 3$ 整理为： $(1+m)x = -2$

该整式方程无解时，原分式方程无解，此时 $m = -1$

该整式方程有解，此解恰好是原分式方程的增根，此时 $m = -\frac{5}{3}$.

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

22. 若关于 x 的分式方程 $\frac{x-a}{x-1} - \frac{3}{x} = 1$ 无解，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1或-2

【解析】去分母得 $x^2 - ax - 3x + 3 = x^2 - x$ ， $(a+2)x = 3$.

当去分母后的整式方程无解时， $a+2=0$ ， $a=-2$ ；

当解为增根时， $x=1$ ， $a=1$.

故答案为：1或-2 .

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

五、含字母参数的分式方程

练习

23. 若方程 $\frac{2}{k(x-1)} = 3$ 的解是 $x=5$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 $\because$ 方程 $\frac{2}{k(x-1)} = 3$ 的解是 $x=5$ ，

$$\therefore \frac{2}{4k} = 3,$$

$$\therefore k = \frac{1}{6}.$$

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

24. 若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{2m}{x^2-1}$ 的解为 $x=5$ ，则 m 的值是（ ） .

A. 1

B. 3

C. 6

D. 9

【答案】B

【解析】 $\because$ 分式方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{2m}{x^2-1}$ 的解 $x = 5$.
 $\therefore \frac{1}{5-1} = \frac{2m}{25-1}$ 即 $\frac{1}{4} = \frac{m}{12}$.
 $\therefore m = 3$, 故选B .

【标注】【知识点】分式方程的解

练习

25. 已知关于 x 的方程 $\frac{m}{x-1} + \frac{3}{1-x} = 1$ 的解是正数, 求 m 的取值范围 () .

- A. $m > 2$ B. $m > 2$ 且 $m \neq 3$ C. $m < 2$ D. $m < 2$ 且 $m \neq 1$

【答案】B

【解析】方程两边都乘以 $(x-1)$ 得, $m-3=x-1$, 解得 $x=m-2$,
 $\because$ 方程的解是正数, $\therefore m-2 > 0$ 且 $m-2 \neq 1$,
 解得 $m > 2$ 且 $m \neq 3$.
 $\therefore m$ 的取值范围是: $m > 2$ 且 $m \neq 3$.
 故选B .

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

26. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-2} - 4 = \frac{k}{2-x}$ 的解为正数, 则 k 的取值范围是 () .

- A. $-8 < k < 0$ B. $k > -8$ 且 $k \neq -2$ C. $k > -8$ D. $k < 4$ 且 $k \neq -2$

【答案】B

【解析】方程两边同时乘以 $x-2$ 得, $x-4(x-2)+k=0$,
 解得: $x = \frac{8+k}{3}$,
 $\because x$ 为正数,
 $\therefore \frac{8+k}{3} > 0$, 解得 $k > -8$,
 $\because x \neq 2$,
 $\therefore \frac{8+k}{3} \neq 2$, 即 $k \neq -2$,
 $\therefore k$ 的取值范围是 $k > -8$ 且 $k \neq -2$.
 故选B .

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

27. 若方程 $\frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+k}$ 的根为负数，则 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $k > 2$ 且 $k \neq 3$

【解析】 去分母化为整式方程为： $3(x+k) = 2x+6$ ，解整式方程得： $x = 6-3k$ ，
根据题意有：
$$\begin{cases} 6-3k < 0 \\ 6-3k \neq -3 \\ 6-3k \neq -k \end{cases}$$
，解得： $k > 2$ 且 $k \neq 3$.

【标注】 【知识点】由分式方程的解确定参数

28. 若关于 x 的方程 $\frac{x+k}{x+1} - 1 = \frac{k}{x-1}$ 的解为负数，则 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$

【解析】 去分母得： $(x+k)(x-1) - (x+1)(x-1) = k(x+1)$ ，
整理得： $x^2 + kx - x - k - x^2 + 1 = kx + k$ ，
解得： $x = -2k + 1$ ，
由分式方程的解为负数，得到 $-2k + 1 < 0$ 且 $-2k + 1 \neq -1$ ，
解得： $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$ ，
故答案为： $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$.

【标注】 【知识点】由分式方程的解确定参数

29. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-1} + \frac{3}{1-x} = 1$ 的解是非负数，则 m 的取值范围是 () .

A. $m > 2$

B. $m \geq 2$

C. $m \geq 2$ 且 $m \neq 3$

D. $m > 2$ 且 $m \neq 3$

【答案】 C

【解析】 解 $\frac{m}{x-1} + \frac{3}{1-x} = 1$ 得 $x = m-2$.
 $\therefore$ 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-1} + \frac{3}{1-x} = 1$ 的解是非负数，
 $\therefore m-2 \geq 0$ 且 $m-2 \neq 1$ ，
 $\therefore m \geq 2$ 且 $m \neq 3$.

【标注】 【知识点】分式方程的特殊解问题

30. 当 k 为何值时, 关于 x 的方程 $\frac{x+3}{x+2} = \frac{k}{(x-1)(x+2)} + 1$ 解为非负数.

【答案】 $k \geq -1$ 且 $k \neq 0$.

【解析】 $\because$ 解为非负数,

$$\therefore k+1 \geq 0,$$

$$\therefore k \geq -1,$$

$$\text{又} \because k+1 \neq 1 \text{ 且 } k+1 \neq -2,$$

$$\therefore k \neq 0 \text{ 且 } k \neq -3,$$

$$\text{综上, } k \geq -1 \text{ 且 } k \neq 0.$$

【标注】【知识点】分式方程的解

【能力】运算能力

31. 若关于 x 的分式方程 $\frac{m-1}{x-1} = 2$ 的解不大于2, 则 m 的取值范围是().

A. $m \leq 3$

B. $m \neq 1$

C. $m < 3$ 且 $m \neq -1$

D. $m \leq 3$ 且 $m \neq 1$

【答案】 D

【解析】 去分母得: $m-1 = 2x-2$,

$$\text{解得: } x = \frac{m+1}{2}, \text{ 且 } x-1 \neq 0, \text{ 即 } x \neq 1,$$

$$\text{根据题意得: } \frac{m+1}{2} \leq 2,$$

$$\text{解得: } m \leq 3,$$

$$\text{则 } m \text{ 的范围为 } m \leq 3 \text{ 且 } m \neq 1.$$

故选: D.

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

32. 关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-2} = 1$ 的解是不小于1的数, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $a \leq -3$ 且 $a \neq -4$

【解析】 去分母得: $2x+a = x-2$, 解得: $x = -a-2$,

$$\text{由分式方程的解是不小于1的数, 得到 } -a-2 \geq 1, \text{ 且 } -a-2 \neq 2,$$

$$\text{解得: } a \leq -3, \text{ 且 } a \neq -4,$$

则 a 的范围是 $a \leq -3$ 且 $a \neq -4$.

故答案为： $a \leq -3$ 且 $a \neq -4$.

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数